

## Comprensión del concepto de sumas infinitas y su convergencia

Beatriz del Pilar Crespo<sup>1,2</sup>, María Cristina Lentini<sup>3</sup>,  
Marta Lucía Lentini<sup>3</sup> y Miriam Isabel Matulovich<sup>1</sup>

### Resumen

Se presenta en este trabajo, los resultados obtenidos después de realizar una experiencia áulica con estudiantes universitarios de primer año, en la asignatura Matemática III, cátedra del área de matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Salta. Es una investigación de causa – efecto, de tipo explicativa y que se apoyó conceptualmente en dos grandes ramas del constructivismo: La Ingeniería Didáctica y las Técnicas Grupales.

La población considerada para este estudio fue la de alumnos de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración, que cursan la asignatura Matemática III. De la misma se extrajo dos muestras (grupos de alumnos de una comisión de Trabajos Prácticos): una de control y la otra experimental. Las metodologías utilizadas fueron: la expositiva (tradicional) para el grupo control y el trabajo grupal, para el grupo experimental.

El objetivo planteado fue: Analizar si el cambio en la metodología de enseñanza, en Matemática III (materia de los planes de estudios de las Carreras: Contador Público Nacional, Licenciado en Economía y Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Salta), beneficia el rendimiento de los alumnos.

Se abordó el tema *series numéricas*, para poder trabajar el concepto de sumas infinitas y su convergencia, ya que es un tópico que presenta innumerables aplicaciones en distintas ciencias y se ha observado que a los alumnos, en general, le resulta dificultosa su comprensión.

Palabras clave: educación superior - aprendizaje colaborativo - suma infinita - convergencia

### 1. Introducción

La mayoría de los alumnos universitarios presentan serias dificultades en la elaboración y manejo de los conceptos matemáticos y su operatividad, cuando cursan las

asignaturas del área matemática en sus primeros años, cualquiera sea el contexto en donde se éstos se enseñan.

Esta situación que se observa con frecuencia en la práctica educativa nos impulsó, en una primera etapa, a identificar los obstáculos

<sup>1</sup> Consejo de Investigación y Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales-Universidad Nacional de Salta.

<sup>2</sup> Facultad de Economía y Administración, Arquitectura y Urbanismo: Educación a Distancia -UCaSal.

<sup>3</sup> Consejo de Investigación y Facultad de Ciencias Exactas-Universidad Nacional de Salta.

para el aprendizaje de determinados conceptos de matemática y, luego, proponer estrategias alternativas de enseñanza para desarrollarlas en las aulas en forma experimental.

El *objetivo* planteado en este contexto fue:

Analizar si el cambio en la metodología de enseñanza, en Matemática III (materia de los planes de estudios de las Carreras: Contador Público Nacional, Licenciado en Economía y Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Salta, beneficia el rendimiento de los alumnos.

## 2. Situación preliminar

Se analizaron los resultados de evaluaciones de Matemática III, realizadas en los años

2008, 2009 y 2010 con el fin de cuantificar los temas que presentan mayor dificultad para los alumnos tanto desde el punto de vista conceptual, operacional e interpretativo.

De una población de 334 alumnos del año 2008, 393 del año 2009 y 298 del 2010, se tomó una muestra aleatoria del 30%, de cada año, de las pruebas parciales

Se codificaron las respuestas de acuerdo a como trabajaron los problemas, considerando en cada ejercicio: el concepto aplicado, el algoritmo de resolución y la conclusión del resultado obtenido como respuesta de la situación planteada:

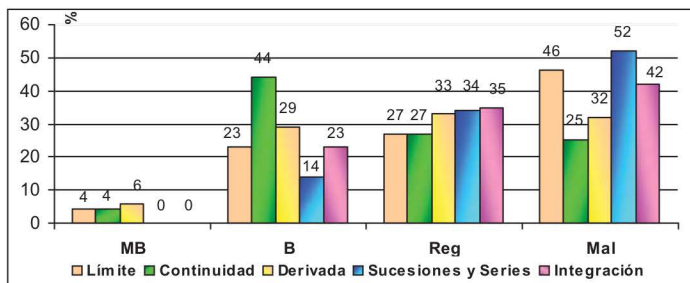
Con los resultados obtenidos se determinó que en el tema que los alumnos presentan mayor dificultad para aprender, es el de suce-

Calificación	Concepto	Algoritmo de resolución	Conclusión
MB	B	B	B
B	B	M	B
R	B	M	M ó sin conclusión
M	M	M	M ó sin conclusión

Los resultados cuantitativos se presentan en la siguiente tabla:

Tema	Muy Bueno (MB)	Bueno (B)	Regular (R)	Mal (M)
Límite	4 %	23 %	27 %	46 %
Continuidad	4 %	44 %	27 %	25 %
Derivada	6 %	29 %	33 %	32 %
Sucesiones y series	0 %	14 %	34 %	52 %
Integración	0 %	23 %	35 %	42 %

Y se ilustran en el siguiente gráfico:



siones y series, por lo que en este trabajo abordamos dicho tema.

Las dificultades que se observaron, en el tema seleccionado, por parte de los alumnos, fueron:

- No diferencian entre convergencia de sucesiones y convergencia de series.
- No diferencian entre el límite del término general de una serie (suma) y el límite del término general de la sucesión que le da origen.
- Al aplicar criterios de convergencia para series, establecen como suma de la serie el resultado del criterio aplicado.
- No diferencian entre series de signos alternados y series de términos positivos.

### 3. Marco teórico

Los principales problemas que enfrentan los docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática inicial de una carrera Universitaria y, en particular los alumnos de distintas carreras (Licenciaturas, Profesorados, Ciencias Económicas, Ingenierías, etc.) es el gran porcentaje de fracasos cuando quieren lograr los objetivos de internalizar contenidos, conceptos, procedimientos y desarrollar habilidades para resolver problemas en tiempo y forma según su planificación.

Los objetivos que se plantean para desarrollar las asignaturas de matemática básica, son pensados en función de un esquema de enseñanza sistemática de la matemática, predominando la tendencia de considerarla como un cuerpo ya elaborado de conocimientos y por lo tanto, la tarea docente consiste en diseñar estrategias, de lo simple a lo complejo, que permita a los estudiantes «asimilar» tales conocimientos.

La Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales, desarrollada por Galperín, define el papel de cada uno de los momentos

funcionales de la actividad: orientación, ejecución y control, así como las transformaciones que sufre la acción en este proceso: abreviación, generalización y automatización.

Para ello se debe:

- Identificar los obstáculos en el aprendizaje de determinados conceptos de matemática.
- Determinar estrategias pedagógicas para la enseñanza-aprendizaje de los temas detectados como críticos
- Actualizar y profundizar las etapas de resolución de problemas, mediante situaciones que contemplen los intereses de los alumnos en relación con sus respectivas carreras.

El constructivismo postula la existencia y prevalencia de procesos activos en la construcción del conocimiento. Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales: de los conocimientos previos y de la actividad externa o interna que el alumno realice al respecto. Tratando de juntar el cómo y el qué de la enseñanza, la idea central del enfoque constructivista se resume en: «enseñar a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextualizados»

La Ingeniería Didáctica se fundamenta en el constructivismo y su proceso experimental está integrado por las siguientes fases:

*Análisis a priori:* donde se detectan y analizan las restricciones desde el punto de vista cognitivo y didáctico. Se basa en un conjunto de hipótesis y su validación está en juego en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Esta primera fase es adidáctica.

*Experimentación:* es la puesta en marcha de los propósitos del diseño. Esta es la fase en la que interviene el docente, con el fin de confrontar los saberes de: los estudiantes, estudiantes-profesor, para llegar a acuerdos generales y reforzar las nociones generadas por los alumnos.

Esta forma de trabajo desconcierta a los

alumnos, ya que esperan una gran participación del docente y la Ingeniería Didáctica no lo implica tanto, ya que el docente es guía, moderador, etc. de las clases.

*Análisis a posteriori*: se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación (observaciones, evaluaciones, encuestas, etc.). Es en la confrontación de éste análisis con el análisis a priori donde se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Por otro lado, el aprendizaje grupal es una nueva concepción de aprendizaje que utiliza al grupo para la construcción y reconstrucción de conocimientos individuales y colectivos, así como para la transformación de la personalidad de cada miembro del grupo.

Es un proceso de interacción mutua entre los miembros del grupo, el profesor, las actividades y los contenidos a asimilar. El aprendizaje grupal implica trabajar con el grupo para lograr su desarrollo. Y el trabajo del profesor con el grupo, establece una transformación notable en la concepción y estructuración de la enseñanza.

Este tipo de aprendizaje no solo se interesa en qué se aprende sino cómo se aprende, conjugando los aspectos cognitivos y afectivos.

Pueden distinguirse tres vertientes de influencia del aprendizaje grupal sobre sus integrantes: la social, la intelectual y la moral.

Este trabajo está basado en estas dos grandes ramas del constructivismo: La Ingeniería Didáctica y las Técnicas Grupales.

Las *técnicas participativas*, como instrumentos que contribuyen a desarrollar la eficacia de los grupos, fueron particularmente tenidas en cuenta para fomentar el diálogo y el respeto entre las personas y fundamentalmente la actitud participativa y de colaboración.

La evaluación que se aplicó fue:

*Formativa*, para conocer las condiciones personales de los alumnos, obtener informa-

ción sobre la evolución y progresos de los mismos, como así también detectar sus dificultades en forma continua.

*Sumativa*, para poder evaluar la concreción de los objetivos.

## 4. Metodología

### 4.1. Hipótesis

Un cambio metodológico usando estrategias de enseñanza-aprendizaje apoyadas en las técnicas participativas (grupales), contribuirá a mejorar el rendimiento de los alumnos de Matemática III, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Salta.

Las variables con las que trabajamos fueron las siguientes:

Variable dependiente: Rendimiento de los alumnos.

Variable independiente: Técnicas participativas.

### 4.2. Definición de las variables

4.2.1. Definición conceptual de la variable dependiente: Rendimiento

Según la Teoría de la Actividad, «está determinado por la calidad de las acciones dirigidas a la formación de conocimientos y habilidades».

4.2.2. Definición operacional: estas acciones tienen en cuenta un conjunto de características o cualidades que permiten medir la calidad de las acciones. De acuerdo a las dificultades observadas en el análisis de los exámenes parciales y finales, en este trabajo consideramos las siguientes acciones:

- Diferencia entre convergencia de sucesiones y convergencia de series (sí o no).
- Diferencia entre suma de una serie y el límite del término general de la sucesión que le da origen (sí o no).

- Reconocimiento de serie de signos alternados y su criterio de convergencia (sí o no).
- Expresión correcta de una definición

4.2.3. Definición conceptual de la variable independiente: *Técnicas participativas*

Metodología de trabajo grupal donde la *tarea* a realizar es el objetivo que el grupo se propone alcanzar. El profesor asume un papel *mediador*, controlando y guiando las tareas a realizar e interviene cuando es necesario en lo relativo a la asimilación de los conocimientos y al funcionamiento del grupo.

Se asume el aprendizaje como un proceso activo, de creación y recreación del conocimiento por los alumnos, mediante intercambios y confrontación de ideas, opiniones y experiencias entre estudiantes y profesor.

## 5. Diseño de la experiencia

Este trabajo es una investigación de causa-efecto, de tipo explicativa, por lo que se utilizó el método experimental, considerando como población en estudio a los alumnos de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración que cursan la asignatura Matemática III. Se trabajó con dos muestras de ese universo: una de control y la otra experimental, conformada cada una de ellas por el 10 % de la población total. Estos grupos se formaron en una Comisión de Trabajos Prácticos y las metodologías utilizadas fueron: la expositiva (tradicional) para el grupo control y el trabajo grupal, en el grupo experimental.

Las muestras se seleccionaron en forma aleatoria y los dos grupos, el de control y el experimental, tienen características similares

al inicio de la experiencia lo que nos proporciona validez interna y una equivalencia inicial. Los resultados obtenidos pueden generalizarse, en principio, a la de todo el universo considerado y luego a materias del primer año con similares características a las estudiadas, lo que nos da una cierta validez externa.

Los instrumentos de medición utilizados fueron:

Planillas de observación de clases (sólo para las clases experimentales) para obtener información de cómo se desarrolló en las mismas la metodología implementada, los recursos didácticos usados, el tiempo estimado para cada tarea, etc.

Evaluación de tipo cognitivo aplicada en ambos grupos: de control y experimental que trabajaron con la metodología tradicional y la nueva propuesta metodológica, con el fin de compararlas.

Evaluación cognitiva (tomada en ambos grupos: de control y experimental) a fin de medir la variable dependiente para su comparación.

Encuesta a alumnos (sólo para el grupo experimental) para recoger información sobre la opinión que los alumnos tienen sobre un cambio en la forma de enseñanza.

La confiabilidad de dichos instrumentos se realizó por el método de «*mitades partidas*» (Split -Halves) obteniendo un 95% para la misma.

## 6. Experiencia

Las estrategias de enseñanza empleadas, en las clases experimentales, constó de las tres etapas o momentos instruccionales previstas por la teoría de grupo. Las mismas se sintetizan en el siguiente cuadro:

Momento de la secuencia instruccional	Estrategias de enseñanza	Técnicas grupales
Preinstruccional	Organizador previo	Lluvia de ideas - Conferencia Heurística
Coinstruccional	Ilustraciones - Resúmenes	Mesa redonda – OPV
Postinstruccional	Cuadro sinóptico - Mapa semántico	Trabajo individual

## 6.1. Etapa preinstruccional

El objetivo de esta etapa fue que los alumnos logren organizar los conceptos previos necesarios para abordar el nuevo tema.

El docente inició la clase planteando un problema motivador de Economía, creando la necesidad del estudio del tema.

Se utilizaron las técnicas del trabajo grupal: lluvia de ideas y conferencia heurística.

## 6.2. Etapa coinstruccional

Los objetivos fijados para esta etapa fueron:

Que los alumnos logren:

- Distinguir el concepto de sucesión y el de serie.
- Dar el concepto de serie convergente y divergencia y simbolizar conceptos.
- Aplicar distintos criterios de convergencia.

Esta etapa constó de dos actividades:

Actividad 1: Se formaron grupos de cinco alumnos cada uno

El docente a cargo de la clase entregó a cada grupo material bibliográfico y situaciones específicas para trabajar en la comprensión de los conceptos. Cada grupo estudió el caso correspondiente y se escucharon los puntos de vista de cada uno de los integrantes y los discutiendo positivamente hasta ponerse de acuerdo y reflejando, luego, las recomendaciones o acuerdos mediante ilustraciones y/o resúmenes, que un representante de cada uno de ellos expuso en una mesa redonda para su discusión

Actividad 2: Consistió en la resolución de

un trabajo práctico para afianzar los conocimientos adquiridos en la actividad 1 y concluir con la técnica Otros Puntos de Vista (OPV).

## 6.3. Etapa posinstruccional

Los objetivos de esta etapa fueron:

Que el alumno logre:

- Integrar los conceptos tratados a través de un cuadro sinóptico.
- Autoevaluarse construyendo un mapa semántico.
- Resolver problemas de aplicación.

En esta etapa el alumno trabajó en forma individual con el fin de efectuar una evaluación de la misma.

## 7. Análisis de los resultados

### 7.1. De las observaciones de clases:

Los recursos didácticos propuestos fueron, en general, buenos tanto para trabajar con los contenidos seleccionados de acuerdo a los objetivos planteados como para trabajar en forma grupal (metodología participativa)

La participación de los alumnos y el clima en el aula fueron muy buenos, pues los alumnos cooperaron entre ellos con respeto y autocontrol de sus acciones, y no fue necesaria la intervención del docente al respecto. La ayuda que solicitaban del mismo se remitía a las aclaraciones de los distintos puntos de vista suscitados en los grupos acerca de una actividad propuesta.

En relación al tiempo programado para cada actividad, los alumnos necesitaron bastante más del previsto, por lo que se retrasaba el cumplimiento del cronograma de la asignatura.

La elaboración del material, por parte de los alumnos, en relación con las actividades teóricas y prácticas fue en su mayoría buena; en las exposiciones orales, fueron bastante regulares, ya que solo se limitaban a repetir, lo que habían elaborado, sin enfatizar conceptos fundamentales teniendo poca o ninguna precisión en las respuestas a las preguntas de sus compañeros o del docente.

En la mayoría de las clases fue necesaria la intervención del profesor para concluir el tema, enfatizando los conceptos vistos y aclarando las dudas que pudieran surgir en los alumnos tanto en forma grupal como individualmente.

### 7.2. De la evaluación cognitiva:

Se realizó mediante un análisis no paramé-

trico, usando la prueba estadística  $\chi^2$  ya que es una prueba para evaluar hipótesis acerca de la relación entre variables categóricas.

Se calcula mediante una tabla de contingencia o tabulación cruzada. Los valores de  $\chi^2$ , a los niveles de confianza de 0,05 y 0,01 según los grados de libertad que en nuestro caso es 3, encontramos: 7,815.

Como se ve, nuestro  $\chi^2$  es un valor muy por debajo de los valores de confianza lo que nos hace, en principio, desestimar la hipótesis: *que un cambio en la metodología influye en el aprendizaje de las variables analizadas*. No obstante, si convertimos las frecuencias observadas en frecuencias relativas o porcentajes, podemos describir a dos o a más variables como se muestran en las siguientes tablas:

	Metodología Tradicional (1)	Metodología Participativa (2)
(A) Diferencia entre convergencia de sucesiones y convergencia de series	11 %	17 %
(B) Diferencia entre suma y el límite del término general de la sucesión que le da origen	12 %	15 %
(C) Reconocimiento de series de signos alternados y su criterio de convergencia	17 %	17 %
(D) Expresión correcta de una definición	2 %	8 %

Con estos valores relativos se observa que hay una diferencia, aunque pequeña, a favor de la metodología participativa.

### 7.3. De las encuestas a alumnos

A partir del procesamiento de ellas, surge que los temas que presentan mayores dificultades en el proceso de aprendizaje son, en primer lugar *serie* y en segundo lugar *límite*.

En cuanto a la forma de trabajo, técnicas participativas, la mayoría de las respuestas fueron que es buena, aunque muchos la consideraron regular, no obstante reconocieron que ésta presenta aspectos positivos como ser: permite una mayor participación por parte de ellos y contribuyen de mejor manera para la

comprensión de los temas.

En general califican como buenas a su participación en el grupo, la claridad de las consignas de las actividades y de las exposiciones. Con respecto al rol del docente, se notó que además de los especificados en la encuesta (guía, moderador, etc.) propusieron, en alto porcentaje, que la participación del profesor en el pizarrón se realice al inicio de la clase.

## 8. Conclusiones

Del análisis anterior se observa que un cambio en la metodología de enseñanza contribuye en muy poco porcentaje a mejorar el rendimiento de los alumnos, creemos que esto se debe a lo poco habituados que se encuen-

tran a trabajar en la forma que lo propone el constructivismo, es decir con el profesor como guía. Los alumnos insisten en el papel del profesor como expositor porque es así como lo conocieron a lo largo de toda su experiencia como alumnos. Sería interesante continuar con este tipo de experiencias en otros temas y en forma continuada para que los alumnos adquieran la forma de trabajar participativamente y logren entender que es más útil para lograr aprendizajes significativos.

No obstante, reconocen que: contribuye a mejorar sus relaciones con otras personas, a mejorar su expresión oral y comprensión de los temas tratados, por lo menos, en el momento de la clase, también son conscientes de que deben afianzar los conocimientos con el estudio posterior, cosa que muchas veces no logran realizar. Permite una mejor organización del proceso enseñanza-aprendizaje de forma tal, que los alumnos no sólo asimilaban los conceptos matemáticos, sino que lograron desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo, alcanzando una mayor solidez para su futura formación profesional.

Se analizaron las ventajas y desventajas de ambas metodologías utilizadas, con el propósito de valorar, si la brecha existente en la comprensión y asimilación de los conceptos, disminuyó con la aplicación de éstas, en diferentes situaciones.

Para llevar a cabo lo expuesto, nos apoyamos en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, diseñando y presentando distintas herramientas con las cuales, los alumnos puedan lograr asimilar y acomodar nuevos significados con el fin de construir, verbalizar y justificar sus conocimientos.

## 9. Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. Gómez, P (Editor). *Ingeniería Didáctica en edu-*

*cación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

Cantoral, R., Reséndiz, E. *Aproximaciones sucesivas y sucesiones*. Cuadernos Didácticos. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V., 1995.

Gimeno Sacristán, J., Pérez Gómez, A. *Comprender y transformar la enseñanza*. Ed. Morata, 1995.

Gorgorió, N, Deulofeu, J., y otros. *Matemática y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*. España: Graó Editorial, 2000.

Gutiérrez, L. *Investigando en la enseñanza*. Instituto Pedagógico Rural «El Mácaro». Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela (Pág WEB).

Gutiérrez, L. «Paradigmas cuantitativos y cualitativos en la investigación socio – educativa: proyección y reflexiones». Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela (Pág. WEB).

Hernández Fernández, H., Delgado Rubí, J.R., Fernández de Alaiza, B. *Cuestiones didácticas de la matemática*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones. 1998.

Lacasta, E. y Rico, L. (Coordinadores). *Metodología de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Universidad Pública de Navarra - Universidad de Granada.

Prieto Castillo, D. «La mediación pedagógica en el espacio de la Educación Universitaria». *Seminario Investigaciones de Tecnologías Educativas en el contexto latinoamericano*. Méjico, 1994.

Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. E. *Cálculo - Octava edición*. México: Pearson Educación, 2001.

Rojas Soriano, R. *Formación de investigadores educativos*. Méjico: Plaza y Valdéz Editores, 1997.

Santos, M. A. *La evaluación: un proceso de diálogo, comprensión y mejora*. Málaga: Aljibe, 1993.