

Beatriz del Pilar Crespo,
Eduardo Zenón Casado
María Cristina Lentini,
Marta Lucía Lentini,
Miriam Isabel Matulovich
Economía

La Modelización Matemática en Economía

Resumen

A través de un estudio de caso se muestra la posibilidad de modificar prácticas matemáticas para la formulación de problemas con aplicaciones a la economía. Se incorpora, además de la innovación didáctica dentro del aula, elementos teóricos que permiten analizar los datos experimentales, revelando aspectos de la modelación matemática que no se hacen evidentes en análisis más convencionales.

La investigación se centró en la exploración de cómo los alumnos resuelven problemas concretos de costos, capitalización y Ley de oferta y demanda, excedente del consumidor y/o productor y cómo es la relación que establecen entre conocimientos matemáticos y económicos. Para llevarla a cabo se usó como metodología las técnicas de aprendizaje colaborativo y cooperativo.

Palabras Claves

Educación Matemática-Modelización Matemática-Aplicaciones a la Economía-Resolución de Problemas

Introducción

La investigación en educación matemática de los últimos años ha incorporado y ha sido enriquecida con trabajos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje del nivel universitario.

Se focaliza el estudio de la enseñanza en las aulas universitarias a partir de la caracterización de las cátedras, en tanto se trabaja la interrelación de tres componentes esenciales de este nivel educativo: la disciplina, el campo profesional y la enseñanza; esta última desde las estrategias metodológicas desarrolladas por los docentes, en relación con los tipos de aprendizaje que promueven en los alumnos.

Recorriendo la historia, parecería que la formalización lógica del concepto matemático como primera aproximación del mismo, trae aparejado un efecto negativo sobre el pensamiento creativo e intuitivo. Es por ello que aspiramos llegar a tales conocimientos haciendo, previamente, referencia a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y desde allí surgirá el rigor matemático necesario para la modelización, resolución e interpretación de resultados de problemas específicos del área económica.

Los alumnos universitarios, de distintas carreras, permanentemente deben usar los conceptos matemáticos en otras asignaturas, pero no perciben la importancia del nexo existente entre ellas. Tal es la relación y fuerza que la matemática tiene en otras ciencias, tanto en contenido temático como en su enseñanza, que nos impulsó a llevar a cabo esta investigación que aborda la problemática del uso de las matemáticas que hacen los alumnos de Matemática III, del año 2007, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Salta, cuando desean modelizar y resolver problemas de economía.

Como algunos integrantes del grupo de investigación de la Universidad Nacional también somos docentes de la Universidad Católica de Salta, a la luz de los resultados de esta experiencia, estamos motivados en aplicarla a alumnos de la Facultad de Economía y Administración.

Se esperan resultados interesantes cuando se comparen las dos muestras de alumnos, que pertenecen a poblaciones diferentes, con

entornos socioculturales heterogéneos.

Si bien hay vastos estudios reconocidos, referentes a modelización y elaboración de representaciones para la resolución de problemas de física y otras ciencias, son escasos para problemas de economía en particular; por lo que los resultados de este trabajo se suman a otros que se comenzaron a realizar en marco de una investigación que se está llevando a cabo con el fin de determinar formas y medios que ayuden, desde la práctica docente, a minimizar las dificultades que presentan nuestros estudiantes en los primeros años de la universidad.

Entendemos que no sólo son importantes los procesos de transferencia de conocimientos matemáticos, sino también de la manera en que se realizan los mismos con el objeto de mostrar, en cada instancia, el uso de ellos en la resolución de problemas de distinta índole.

Objetivos de la investigación

Para realizar esta investigación, se fijaron como objetivos para que los alumnos de Matemática III de la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.Sa. logren:

- Modelizar problemas específicos de economía.
- Interpretar e integrar los resultados en forma crítica.
- Trabajar colaborativa y cooperativamente.

Descripción

Se trata de una investigación experimental, de carácter cuantitativa y cualitativa.

De acuerdo a los objetivos planteados, la información se obtuvo a partir de una secuencia de problemas seleccionados, con el objeto de detectar el grado de solvencia que presentan los alumnos en el momento de resolverlos y cómo interpretan los resultados obtenidos.

Se seleccionaron tres problemas de aplicación en economía, sobre los temas económicos y sus respectivos contenidos matemáticos necesarios para ser abordados.

- i) Costos - (extremos relativos).
- ii) Capitalización - (sucesión numérica).
- iii) Ley de oferta y demanda. Excedente del consumidor y/o productor (integral definida).

Marco teórico

En el escenario histórico en que vivimos y el marco global de redefiniciones actual, las tecnologías, las ciencias y, particularmente, las matemáticas, ocupan un papel privilegiado. En el nuevo marco cognoscitivo de hoy, esta disciplina desempeña un papel muy importante.

El progreso de las matemáticas y sus aplicaciones está vinculado con otras dimensiones esenciales de la construcción cognoscitiva y sus posibilidades están íntimamente relacionadas epistemológica y socialmente con la educación. La educación Matemática o la Matemática Educativa es uno de los campos decisivos, para desarrollar destrezas, métodos, además de contenidos necesarios en la sociedad del conocimiento. Debe destacarse que se trata de un espacio profesional propio, distinto al de las matemáticas.

El avance de los análisis cuantitativo, cualitativo y la permanente investigación en esta área constituye uno de los principales objetivos en la redefinición de la misión institucional de la universidad en el siglo actual.

A la sociedad del conocimiento, le es imprescindible incorporar a los procesos de transmisión, formación y proyección de los conocimientos, aquellos referentes a la construcción, creación o generación cognitiva.

Asumiendo el nuevo contexto de la educación matemática, basamos nuestra investigación en los aportes que brinda la resolución de problemas como estrategia, la fenomenología didáctica, las contribuciones de

la Escuela de Didáctica de las Matemáticas en Francia, la psicología cognitiva, entre otras.

Uno de los autores pioneros que trató la resolución de problemas como metodología para enseñar matemática fue Pólya¹, quien indicaba que el docente debe tomar las equivocaciones como modelo; es decir, poner un problema en la pizarra, tratar de resolverlo (aún cuando él sepa la solución), elegir una estrategia que sabe que no lo lleva al resultado correcto y ver en qué momento toma la decisión de optar por otra.

El profesor resuelve problemas como modelo, y posteriormente, debe discutir las soluciones con todo el grupo para que cada uno aporte ideas.

Schoenfeld² establece un aspecto transversal en la resolución de problemas y lo denomina *sistema de creencias*. Éste consiste en el conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes poseen acerca de la matemática y su enseñanza.

Las fases que caracterizan la enseñanza basada en la resolución de problemas son:

- Motivar con un problema situado en la realidad.
- Establecer su organización de acuerdo a los conceptos matemáticos que se involucran.
- Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos

¹ Las aportaciones de Pólya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro *Cómo Plantear y Resolver Problemas* que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas. Otros trabajos importantes de Pólya son *Descubrimiento Matemático (I y II)*, y *Matemáticas y Razonamiento Plausible (I y II)*. Pólya, que murió en 1985 a la edad de 97 años, enriqueció a las matemáticas con un importante legado en la enseñanza de estrategias para resolver problemas.

² El tipo de creencia que Schoenfeld enfoca más a cómo perciben el estudiante y los profesores o los matemáticos el asunto de la argumentación matemática formal, a la hora de resolver un problema.

tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.

- Resolver el problema.
- Interpretar la solución, en términos de la situación inicial.

Esta secuencia determina, en forma general, la metodología de enseñanza de las matemáticas para que las personas las empleen en una pluralidad de profesiones y trabajos.

Obtención de datos y metodología

Se trabajó con alumnos que finalizaron el cursado de Matemática III del primer cuatrimestre de segundo año de las carreras de Contador Público, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración, porque a esta altura de la carrera tienen conocimientos básicos elementales sobre contabilidad y microeconomía, además de los conceptos matemáticos necesarios para poder formular, desarrollar e interpretar problemas económicos.

La experiencia se desarrolló con 40 estudiantes tomados al azar, de dos comisiones de trabajos prácticos, a los que se les pidió su conformidad para participar de la misma, antes de llevarla a cabo. Se realizó en dos sesiones pautadas de 3 hs. cada una.

El procedimiento seguido para el desarrollo de las clases experimentales, constó de los siguientes pasos:

Primera sesión:

La misma consistió, básicamente, en la organización de 8 grupos de 5 alumnos cada uno, con el objeto de que trabajando juntos maximicen su propio aprendizaje y el de los demás. Fueron dos los docentes conductores. Los pasos seguidos fueron:

o Exposición, por parte del docente conductor, de las directivas generales para trabajar en el grupo, de la forma individual de presentar los resultados y de las recomendaciones para la presentación oral de los mis-

mos, como así también sobre los aspectos a evaluar.

o Descripción de los recursos disponibles (libros de texto, fotocopias de publicaciones, etc.) para realizar el trabajo grupal, como así también de una ficha que debieron llenar para evaluar el funcionamiento de sus respectivos grupos de trabajo y opinar sobre la forma de trabajar.

o Revisión de conceptos económicos necesarios para la resolución e interpretación de los problemas.

o Formación de los grupos de trabajo, que se realizó por libre elección de los alumnos.

o Distribución de los enunciados a todos los alumnos participantes de la experiencia.

La meta fue que los miembros de cada grupo realicen el planteo de los problemas, usen los contenidos conceptuales (matemáticos y de economía) y procedimentales apropiados para que cada uno de ellos logre presentar los resultados en forma correcta. Cada alumno debió plantear y resolver cada uno de los problemas en forma individual.

El tiempo empleado por los alumnos para resolver los problemas y redacción de sus respuestas para ser presentadas al docente conductor, fue en promedio de dos horas y cuarenta minutos.

Segunda sesión

Se entregó a cada grupo material, consistente en papel afiche, marcadores, transparencias, etc., para que formalicen la presentación oral para el resto de los compañeros.

Se promovió la discusión interna entre los integrantes de cada grupo, motivando el trabajo cooperativo y colaborativo, para la presentación oral y exposición de resultados por parte de un representante.

Posteriormente se realizó un debate sobre los distintos puntos de vista de las resoluciones, en donde el docente conductor realizó un resu-

men integrador para fijar distintos aspectos: conceptuales, procedimentales e interpretativos.

Esta sesión se desarrolló en las tres horas previstas.

Análisis de resultados y conclusiones

Se evaluaron los siguientes aspectos:

I. Con respecto a la resolución individual de los problemas

- 1) Interpretación del problema.
- 2) Modelización desde le punto de vista económico.
- 3) Aplicación del concepto matemático adecuado.
- 4) Interpretación de resultados.

Una vez retiradas las respuestas, se procedió a la codificación para su análisis.

La tabla siguiente muestra en la columna relativa a:

i) Modelización, los resultados obtenidos por los alumnos que respondieron correctamente la acción de interpretar el problema ($N = 23$).

ii) Aplicación del concepto matemático (teoría de extremos relativos, sucesión numérica o integral definida, según el problema); la cantidad de alumnos sobre los que plantearon correctamente el problema ($N = 14$).

iii) Interpretación de resultados, la cantidad de alumnos sobre los que aplicaron correctamente el concepto matemático ($N = 11$).

Problema	Tema		Interpretación problema N = 40		Modelización N = 23		Aplicación concepto N = 14		Interpr. resultados N = 11	
			Nº alum.	%	Nº alum.	%	Nº alum.	%	Nº alum.	%
1	Costos	Correcto	23	57,5	14	60	11	78,6	9	81,8
		Regular	10	25	4	17,4	1	7,1	1	9,09
		Incorrecto	7	17,5	5	21,7	2	14,2	1	9,09
2	Capitalización	Correcto	19	47,5	12	52,1	11	79	7	63,6
		Regular	11	27,5	5	21,7	0	0	3	27,3
		Incorrecto	10	25	6	26,1	3	23	1	9,09
3	Ley de oferta y demanda	Correcto	22	55	13	56,5	10	72	8	72,7
		Regular	10	25	7	30,4	2	14	2	18,2
		Incorrecto	8	20	3	13,1	1	7	1	9,09

Tabla 1

Problema 1: La función de costos de una empresa se puede obtener sabiendo que sus costos fijos son de \$ 20 y la producción de un artículo cuesta \$ 7. Además la función ganancia tiene un comportamiento lineal; sin producir la empresa pierde \$ 20 y produciendo 10 unidades la empresa gana \$ 10

- a) Escriba la función de ingreso
- b) Encuentre el punto de equilibrio
- c) ¿A partir de qué producción la empresa es rentable?

En este primer problema se notó que el principal obstáculo que se les presenta a los alumnos, es la interpretación de la consigna, lo que les impide modelizar la situación desde el punto de vista económico, asociado al matemático.

Problema 2: Se depositan \$ 1.300.000 a una tasa de interés anual, capitalizable mensualmente. Si después de 6 años la cantidad se duplicó y se reinvertió al doble de la tasa anterior, ¿cuánto dinero habrá en 6 años más?

Se obtuvieron los resultados esperados, ya que los alumnos no logran incorporar correctamente el concepto matemático de sucesión, independientemente de las aplicaciones económicas.

Problema3: En un estudio realizado a principios del año 2004, se proyectó un crecimiento en el mercado de los medicamentos que reducen una determinada enfermedad.

Las ventas de mercado están dadas en millones de pesos en el siguiente cuadro:

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Mercado	12,19	14,07	16,21	18,28	20,00	21,72

a) Determine una función que indique la evolución de las ventas desde 1999 al 2004.

b) Grafique e interprete .

Se puede concluir en este caso que los alumnos interpretaron con mayor facilidad el problema debido a que los conceptos económicos necesarios para abordarlo, lo ven simultáneamente en asignaturas específicas de la carrera.

En la mayoría de los casos se observó que hicieron uso de la matemática como herramienta, pero con frecuencia desligada del contexto real planteado en los problemas. Así también, no reconocieron la relación entre los conceptos de economía con los resultados del modelo matemático.

Se observó que carecen de habilidad para traducir los problemas expresados en forma coloquial a sus correspondientes expresiones simbólicas (modelización) y no logran, aún en estas instancias, interpretar el problema en su totalidad.

Como resultado de esta evaluación, a partir de las respuestas indivi-

duales de los 40 alumnos participantes en la experiencia, tenemos los siguientes resultados:

Problema	Tema		Resuelven Problema N = 40	
			Nº alum.	%
1	Costos	Correcto	9	22,5
		Regular	1	2,5
		Incorrecto	1	2,5
2	Capitalización	Correcto	7	17,5
		Regular	3	7,5
		Incorrecto	1	2,5
3	Ley de demanda	Correcto	8	20
		Regular	2	5
		Incorrecto	1	2,5

Tabla 2

Lo que significa que la cantidad de alumnos que resuelve bien los problemas, y de acuerdo al tema, no supera el 23%.

II. Con respecto al trabajo cooperativo como estrategia didáctica

- 1) Desempeño de los alumnos en los grupos.
- 2) Liderazgo y responsabilidad.
- 3) Presentación oral de los trabajos.

En general, cuando debieron discutir los resultados obtenidos en forma individual con los integrantes del grupo, recurrieron todos, en mayor o menor medida, al docente conductor de la clase. Para la mayoría de los alumnos ésta fue la primera experiencia de trabajo grupal.

En cuanto a la evaluación del desempeño de los grupos, aún cuando se haya hecho el esfuerzo de trabajar conjuntamente, en algunos casos no pudieron superar las individualidades y considerando globalmente los resultados y opiniones vertidas en las fichas podemos hacer los siguientes comentarios

En general hubo rotación de roles, en un solo grupo no se observó esta tendencia. El liderazgo no siempre fue compartido y lo ejerció un alumno del grupo. Los miembros del grupo intercambiaban comentarios unos a otros de forma fluida y natural sin saber que se estaban retroalimentando para llegar a un objetivo común.

En cuanto a la participación, la respuesta general indica que no todos participaron en igual medida aunque la mayoría considera que el grupo trabajó con eficacia. Con respecto a la interacción entre los distintos grupos, se manifiesta que no hubo intercambio de opiniones e información, mientras elaboraban las conclusiones.

Las dificultades que los alumnos manifiestan con más frecuencia, al realizar estas experiencias es la falta de costumbre para trabajar en grupo.

Las presentaciones de los trabajos individuales se ajustaron al formato que se había establecido, pero en aproximadamente el 50% de ellos se observaron muchas impropiedades en sus escritos.

En cuanto a la presentación oral, las opiniones recogidas de los alumnos fueron contrastadas con la opinión de los docentes conductores y, en ese sentido, puede decirse que hay coincidencia en forma general con apreciaciones realizadas para cada grupo y no se observan diferencias sustanciales. Por otro lado, éstas fueron apropiadas, dirigidas a todo el auditorio aunque no siempre resultaron fáciles de realizar debido a la carencia de expresión oral que manifiestan la mayoría de los alumnos.

En cada grupo, el orador llevó a cabo su exposición usando recursos didácticos tales como: afiches, transparencias, láminas o pizarrón.

Los resultados obtenidos con esta experiencia, a juicio de los docentes, revelan un progreso en el aprendizaje de los alumnos evidenciados por los cambios de conducta observados, la responsabilidad puesta de manifiesto, el compromiso asumido y los logros alcanzados.

Conclusión final de la experiencia

Si bien es cierto que los alumnos poseen los conceptos matemáticos necesarios, se les dificulta mucho el poderlos relacionar con los conceptos económicos y/o financieros.

En consultas realizadas con los docentes de las mencionadas áreas, nos informan que cuando se les imparte los conceptos y se les muestra la relación con la matemática, recién entonces aceptan y comprenden el porqué de ciertos temas impartidos en Matemática III.

Se considera que se cumplieron adecuadamente los objetivos propuestos y que la experiencia recogida resultará muy útil para la organización de futuras actividades similares en cátedra del área matemática u otras.

En el convencimiento de que el empleo del aprendizaje de tipo cooperativo- colaborativo no es una tarea fácil, ya sea porque los estudiantes no están acostumbrados a trabajar juntos o porque los docentes estamos habituados a impulsar a que los alumnos aprendan individualmente, se considera que esta experiencia se tradujo en un aprendizaje tanto para los alumnos como para los docentes y más teniendo en cuenta que debían interpretar resultados en otras áreas.

Realizar este tipo de experiencias exigió de mucho esfuerzo, constancia y continuidad. Los resultados se consideran satisfactorios teniendo en cuenta que no es una estrategia usualmente utilizada, por lo que se piensa extenderla progresivamente en otras cátedras del área matemática.

Referencias bibliográficas

- Ander Egg, Ezequiel. *El Trabajo en Equipo*. Argentina: Lumen / Humanitas, 1997.
- Castro Pérez, Jaime; González Nucamendi, Andrés. *Problemario de matemáticas para administración y economía*. México: Thomson, 2002.
- Gutiérrez Rodríguez, A. *Matemáticas: cultura y aprendizaje*. España: Síntesis, 1999.
- Haeussler, Ernest y Paul, Richard. *Matemáticas para Administración y Econo-*

mía, Ciencias Sociales y de la vida. México: Prentice Hall, 1997.

· Hitt Espinosa, Fernando (Ed.). *Didáctica: Investigaciones en Matemática Educativa* México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

· Polya, G. *Cómo resolver problemas.* México: Editorial Trillas, 1970.

· Rico Romero, Luis. Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, ISSN 0034-8082, N° 1, 2006, pags. 275-294. On line (<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1975731>)

· Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D.Grouws,Ed.). p. 334-370. On line. (http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html)

· Schoenfeld, Alan. *Mathematical problem resolving.* California: Academic Press Inc, 1985.

· Tan, Soo Tang. *Matemáticas para administración y economía.* México: Thomson, 2005.

· Weber, Jean E. *Matemática para administración y economía.* Cuarta Edición. México: Harla, 1984.

Perfil académico y profesional de los autores

Beatriz del Pilar Crespo: Ingeniera en Construcciones; Profesora Universitaria y en etapa de evaluación de Tesis de Maestría en Gestión Educativa. Integrante de distintos proyectos del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta. Docente del área Matemática en las Facultades de Economía y Administración; Ciencias Jurídicas; Arquitectura y Urbanismo y en Educación a Distancia de la Universidad Católica de Salta y en la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la U.N.Sa. bcrespo@ucasal.net

Eduardo Zenón Casado: Ingeniero en Construcciones; Profesor Universitario y en etapa de redacción de Tesis de Maestría en Gestión Educativa. Integrante de distintos proyectos del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta. Docente del área Matemática en las Facultades de Economía y Administración; Cien-

cias Jurídicas; Arquitectura y Urbanismo y en Educación a Distancia de la Universidad Católica de Salta y en la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la U.N.Sa. ecasado@ucasal.net

María Cristina Lentini: Ingeniera Química; Profesora Universitaria, Especialista DEA (Universidad Rovira i Virgili, Tarragona, España). Integrante y directora de distintos trabajos y proyectos de investigación del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta. Docente del área Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta mcclentiniar@yahoo.com.ar

Marta Lucía Lentini: Ingeniera Química; Profesora Universitaria, Especialista DEA (Universidad Rovira i Virgili, Tarragona, España). Integrante y directora de distintos trabajos y proyectos de investigación del Consejo de Investigación de la U.N.Sa. Docente del área Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la U.N.Sa. lentinim@unsa.edu.ar

Miriam Isabel Matulovich: Contadora Pública Nacional, Profesora en Ciencias Económicas y Jurídicas, Especialista en Enseñanza de las Ciencias Económicas y Jurídicas. Integrante de un proyecto de investigación del Consejo de Investigación de la U.N.Sa. Docente del área Matemática en la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la U.N.Sa. miriampanza@arnet.com.ar