

## **Aplicación del Método de Galerkin al análisis de la estabilidad del equilibrio elástico de las columnas**

**Carlos M. Albarracín<sup>1</sup> – Fernando J. Albarracín<sup>1</sup> – Lía E. Orosco Segura<sup>1</sup>**

### **Resumen**

La determinación de las cargas críticas que pueden ocasionar inestabilidad en elementos estructurales tipo columnas, es de vital importancia en el diseño estructural, ya que una falla de este tipo puede originar el colapso de una estructura. En esta investigación se ha adoptado como modelo matemático de barras, el de Euler-Bernoulli, se ha incluido la variación de la sección y la presencia de un apoyo elástico en la dirección de la longitud del elemento estructural. En primer lugar se procedió a derivar la Formulación Débil del problema y se aplicó el método de Galerkin para determinar las cargas críticas. A partir de la adopción de espacios de polinomios de dimensión finita, se pudo abordar el estudio de diferentes problemas con condiciones clásicas de apoyo.

**Palabras clave:** Galerkin - pilotes - suelo

### **Abstract**

The estimation of the critical load that can produce buckling in columns-type elements, is of primarily importance, since it can origin structural collapse. In this work, the beam model of Euler-Bernoulli has been adopted to analyze the problem, and variable cross section and elastic support in the direction of the element, are included.

At first it is derived a weak formulation problem, and afterwards, the Galerkin Method is applied to calculate the critical loads. The adoption of spaces of finite dimension polynomials made possible to handle the solution of different load cases as well as different support conditions.

**Keywords:** Galerkin - piles - soil

---

## **1. Introducción**

La determinación de las cargas críticas de pandeo en elementos estructurales tipo columnas, como es sabido, resulta de vital importancia en el diseño estructural. El modelo matemático

---

<sup>1</sup> Es.I.Ing. Instituto de Estudios Interdisciplinarios de Ingeniería, Universidad Católica de Salta, Argentina.

más usual es aquel que presenta barras con deformación por flexión de acuerdo con el modelo de barra de Euler-Bernoulli. En los problemas clásicos, las columnas pueden presentar diferentes condiciones de apoyo en sus extremos y existe una amplia bibliografía en la cual se detallan los modelos matemáticos y las soluciones exactas correspondientes. En Ingeniería Civil por ejemplo, la posibilidad de falla por pandeo en fundaciones profundas (con pilotes) puede en ocasiones estar subestimada, por lo que es preciso tener en cuenta en el modelo matemático la estructura de fundación y su interacción con el suelo, el que puede ser modelado por medio de resortes. En el caso de diseño de elementos mecánicos esbeltos, la variación de espesor es una práctica muy común, ya que de esa manera se logran componentes mecánicos de poco peso, importante si estos elementos trabajan con movimiento.

El objetivo de este trabajo, es determinar valores de cargas críticas de pandeo y sus correspondientes modos de falla en el caso de barras con espesor variable, restricción elástica en el sentido longitudinal y considerando varias de las condiciones de apoyo clásicas. La obtención de la formulación débil del problema permite la aplicación del método de Galerkin, y con él se pueden determinar valores de cargas críticas que ocasionan inestabilidad del equilibrio elástico.

## 2. Formulación

Considérese una barra tal como se muestra en la Figura 1, sometida a la acción de una carga  $P$  que siempre mantiene una dirección paralela al eje  $\bar{x}$ . Esta barra está constituida por un material isótropo y homogéneo, de momento de inercia  $I(\bar{x})$  cuya expresión es función de la variación de la sección. La incorporación de una restricción elástica  $K(\bar{x})$  lo largo de la barra limita los desplazamientos transversales. Estos desplazamientos se suponen posibles sólo en el plano  $\bar{x} - \bar{y}$ .

A los efectos ilustrativos, se considera un problema con un empotramiento en la base y libre en el otro extremo.

El problema de contorno en este caso es

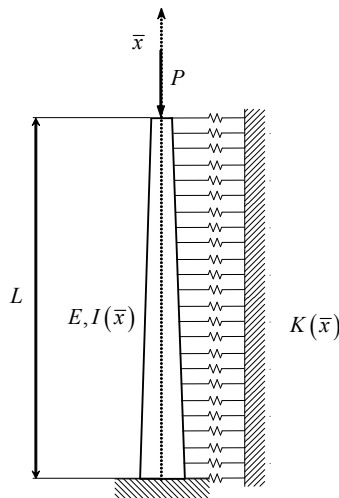


Figura 1.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left[ EI(\bar{x}) \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right] + P \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + K(\bar{x}) w(\bar{x}) &= 0, \quad \forall \bar{x} \in (0, L), \\ w(\bar{x}) \Big|_{\bar{x}=0} &= 0, \quad \frac{dw(\bar{x})}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = 0, \\ \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=L} &= 0, \quad \frac{d}{d\bar{x}} \left[ EI(\bar{x}) \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right] + P \frac{dw(\bar{x})}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=L} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Al adoptar un cambio de variable de la forma  $x = \frac{\bar{x}}{L}$ , se tiene el siguiente problema de contorno en forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{I(x)}{I_0} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \beta k(x) w(x) &= 0, \quad \forall x \in \Omega = (0, 1), \\ w(x) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{dw(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=1} &= 0, \quad \frac{I(x)}{I_0} \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + \alpha \frac{dw(x)}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

en donde  $I_0 = I(x) \Big|_{x=0}$ ,  $\alpha = \frac{PL^2}{EI_0}$  y  $\beta = \frac{L^4}{EI_0}$ .

El espacio apropiado para ubicar el problema de contorno asumiendo

$$k, I \in L^2(\Omega), \text{ es}$$

$$V(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega), v \Big|_{x=0} = v' \Big|_{x=0} = 0 \right\}. \quad (3)$$

Para derivar la formulación débil, se aplica el procedimiento habitual, tal como se expone en Atkinson y Han (2001), es decir

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{I(x)}{I_0} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \beta k(x) w(x) \right\} v(x) dx = 0, \quad (4)$$

para toda  $v \in V(\Omega)$ . Cuando en (4) se aplica la fórmula de integración por partes dos veces al primer término de la integral, una vez al segundo término y se consideran las condiciones de contorno del problema, se arriba a la siguiente expresión

$$\frac{1}{I_0} \int_0^1 I(x) w''(x) v''(x) dx - \alpha \int_0^1 w'(x) v'(x) dx + \beta \int_0^1 k(x) w(x) v(x) dx = 0. \quad (5)$$

En consecuencia, la formulación débil resulta

$$\begin{cases} \text{Hallar } w \in V(\Omega) \text{ tal que} \\ a(w, v) - \alpha (w', v')_{L^2} = 0, \quad \forall v \in V(\Omega), \end{cases} \quad (6)$$

en donde

$$a(w, v) = \frac{1}{I_0} \int_0^1 I(x) w''(x) v''(x) dx + \beta \int_0^1 k(x) w(x) v(x) dx \quad (7)$$

y

$$(w', v')_{L^2} = \int_0^1 w'(x) v'(x) dx. \quad (8)$$

La formulación es un problema de autovalores y la existencia y unicidad de su solución no son tratadas en este trabajo, pero pueden ser consultadas en el trabajo de Rektorys (1980).

### 3. Aplicación del método de Galerkin

A partir de la formulación variacional obtenida en la sección anterior, es posible aplicar el método de Galerkin para obtener valores aproximados de los coeficientes adimensionales  $\alpha$  de cargas críticas.

Si se considera el espacio de dimensión finita  $V^h(0,1) \subset H^2(0,1)$ , el planteo de la formulación débil en este espacio resulta

$$\begin{cases} \text{Hallar } w_h \in V^h(\Omega) \text{ tal que} \\ a(w_h, v_h) - \alpha (w_h', v_h')_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in V^h(\Omega). \end{cases} \quad (9)$$

Toda función perteneciente a  $V^h$  puede ser expresada como combinación lineal de una base, por lo tanto,  $w_h, v_h$  resultan

$$w_h = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i, \quad (10)$$

en donde las  $\varphi_i(x)$  son funciones de la base de  $V^h$  y  $N$  la cantidad adoptada.

Al reemplazar las expresiones en la y operar algebraicamente, se obtiene el siguiente problema de autovalores

$$(\mathbf{K} - \alpha \mathbf{M}) \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

en donde las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  son simétricas y  $\mathbf{C}$  es el vector de los parámetros desconocidos  $c_j$ . Los componentes  $\mathbf{K}$  y se obtienen de la siguiente forma

$$\mathbf{K}_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{i,j} = (\varphi'_i, \varphi'_j)_{L^2}. \quad (13)$$

#### 4. Resultados numéricos

Como ejemplo de prueba, se presenta el análisis de una columna de espesor constante y empotrada en la base y libre en el extremo superior. La base propuesta para el espacio está dada por el conjunto de funciones Los resultados que se muestran en la tabla 1 coinciden con los publicados por Wang et al. (2005).

**Tabla 1:** Coeficientes  $\alpha$  correspondientes a los 4 primeros modos y para diferentes valores de  $N$ .

$N$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	3.000000	-----	-----	-----
2	2.485962	32.180705	-----	-----
3	2.467738	23.391255	109.141007	-----
4	2.467404	22.321761	69.404350	265.806484
5	2.467401	22.213852	63.027671	148.205039
6	2.467401	22.206915	61.862571	127.206852
7	2.467401	22.206619	61.701715	122.167158
8	2.467401	22.206610	61.686176	121.097190

Para el siguiente problema, la formulación débil resulta idéntica a la dada en , siempre y cuando las condiciones de contorno sean homogéneas. Para obtener la solución correcta, sólo se debe seleccionar apropiadamente una base para el espacio en donde se define la solución del problema. En este caso se trata de una columna con base empotrada, extremo superior simplemente apoyado, restricción elástica y momento de inercia variable de acuerdo con la expresión en donde y son constantes y es una dimensión de la sección transversal. El valor del parámetro permite modelar las secciones más usuales en ingeniería. A continuación se presentan valores del parámetro de los cuatro primeros modos, los cuales se obtienen adoptando También se muestran las formas modales correspondientes a

**Tabla 2:** Coeficientes  $\alpha$  para  $h(x) = 1 + x, \forall x \in [0, 1]$  y  $D = 1$ .

$n$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	29.448963	86.988418	173.278815	288.328976
2.4	48.301874	142.563149	283.924481	472.400228
3	58.957689	174.037185	346.618134	576.718517
4	80.762914	238.718064	475.599477	791.431245

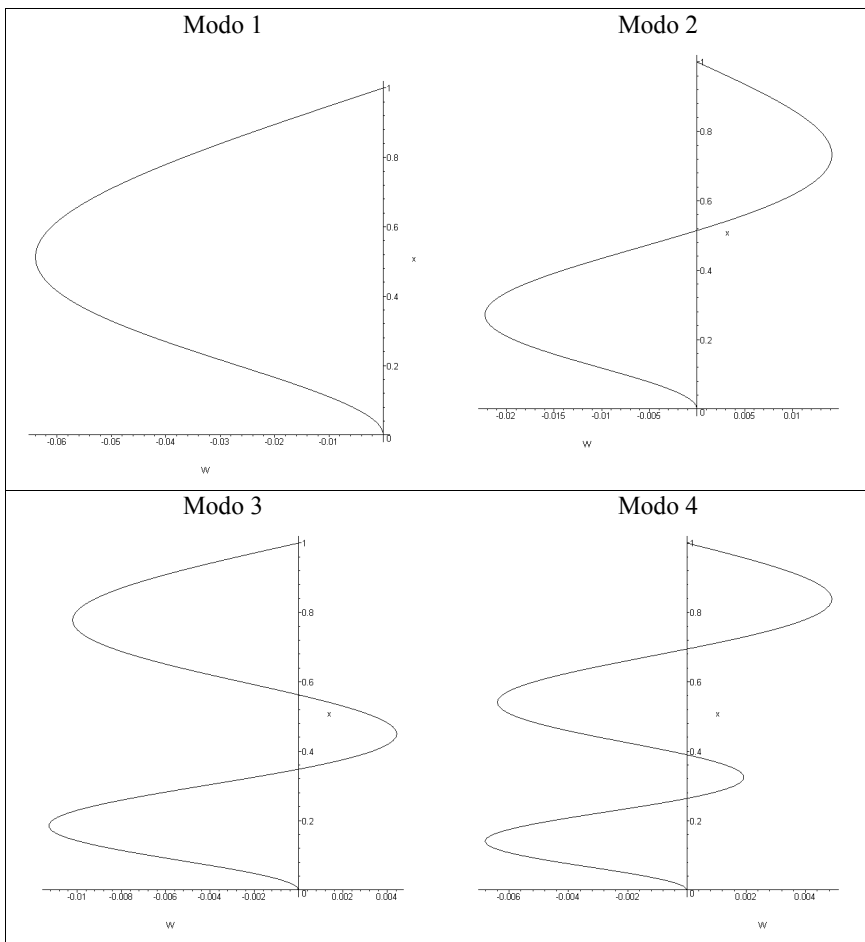


Figura 3. Modos normales de pandeo para  $n = 3$ .

En el problema que se propone a continuación, una columna simplemente apoyada en ambos extremos, presenta una restricción elástica constante a lo largo de toda su longitud, con momento de inercia y en la figura 4 se muestra el primer modo y en ella se puede observar que con el incremento de  $k(x)$  se producen consecuentes aumentos en el número de las semi-ondas del primer modo.

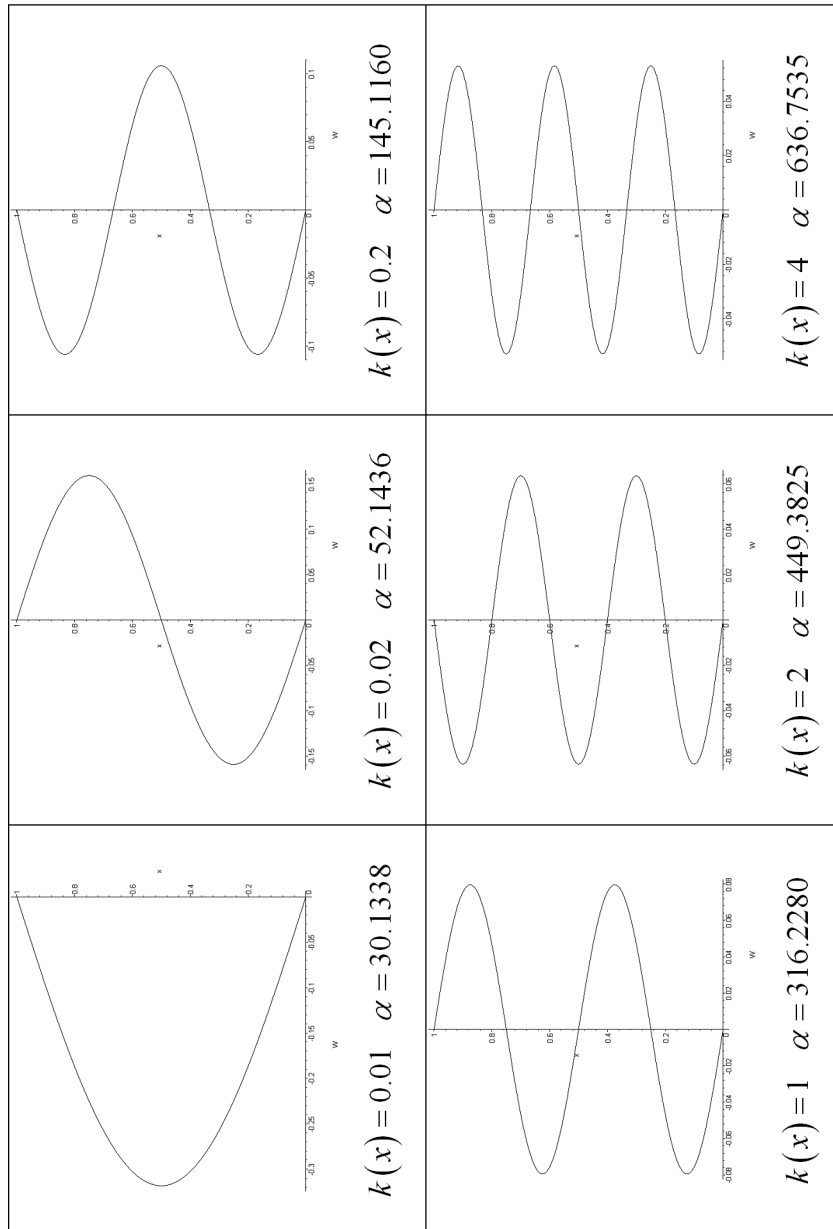


Figura 4. Primer modo normal para diferentes valores  $k(x)$  y  $N = 20$ .

De este incremento en el número de semi-ondas del primer modo surge una pregunta: ¿A partir de qué valor del resorte pasa de una sola semi-onda a dos semi-ondas? Este valor existe y es  $C$  tal que  $0.01 < C < 0.02$  (como puede observarse en la figura 4). La solución del problema para  $k(x) = C$  presenta un auto valor de multiplicidad 2, es decir  $\alpha_1 = \alpha_2 = 49.348022$ , cuyas formas modales son semejantes al primer y segundo gráfico de la figura 4, es decir, la columna puede fallar con cualquiera de las dos formas modales.

Otro aspecto importante surge para el caso de una columna con momento de inercia constante, tal como se muestra en la Tabla 3. En ella se aprecia que con el incremento en una cierta cantidad del valor de  $k$ , la forma modal que presenta una sola semi-onda (el primer gráfico de la Figura 1), se desplaza al segundo modo, tercer modo y así sucesivamente, permutando la posición con la forma modal inmediatamente posterior.

**Tabla 3:** Modos con una sola semi-onda.

$k(x)$	$i$ (modo con una sola semi-onda)	$\alpha_1$	$\alpha_i$
0.010	1	35.199900	35.199900
0.025	2	55.309852	73.195344
0.050	3	71.141287	136.521084
0.070	4	83.806435	187.181676
0.100	5	102.804157	263.172564
0.150	6	131.043599	389.824043
0.200	7	145.115986	516.475523

## 5. Conclusiones

El método de Galerkin se presenta simple de implementar en computadoras, y sin perder flexibilidad para el análisis de diferentes problemas, puede emplearse incluso en aquellos de interés en la ingeniería aplicada. Para los casos más comunes tales como los mostrados en la bibliografía, se observa una rápida convergencia a los valores exactos con el incremento del número de funciones en la base del espacio  $V^h$ . Durante la resolución de problemas con apoyo elástico continuo ( $k(x) \neq 0$ ), se observó una disminución en la velocidad de convergencia, por lo que se tuvo que recurrir a bases de 40 funciones para obtener valores de  $\alpha_1$  con una precisión de 4 dígitos significativos. El fenómeno del autovalor de multiplicidad 2 con dos formas modales diferentes, también se presenta en problemas de vibraciones naturales, tal como fue analizado por Albarracín et al. (2004). La practicidad del método de Galerkin posibilita la resolución de problemas de ingeniería aplicada, es por ello que los autores prevén en próximos trabajos, publicar el análisis de casos particulares.

## **6. Agradecimientos**

El autor agradece el apoyo y financiamiento del Consejo de Investigaciones de la UCASAL para la realización del presente trabajo (Proyecto 115/13).

## **7. Referencias**

Albarracín, C.M., Zannier, L. y Grossi, R.O.(2004). «Some observations in the dynamics of beams with intermediate supports». *Journal of Sound and Vibration*, vol. 271, 475-480, Academic Press.

Atkinson, K. y Han, W. (2001). «Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework». Springer-Verlag, New York.

Rektorys, K.(1980). «Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering».D. Reidel Co.

Wang C.M., Wang, C.Y. y Reddy, J.N. (2005). «Exact Solutions for Buckling of Structural Members». CRC Press.